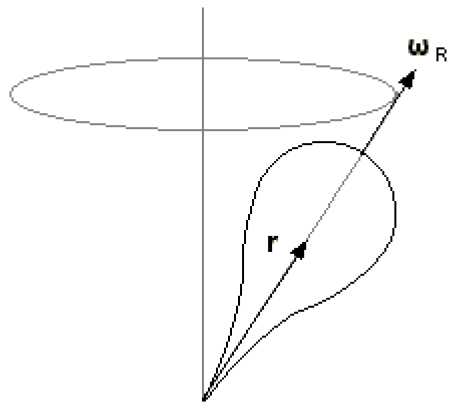
Um pião gira em torno de seu eixo de simetria com velocidade ω_R, possui raio de giro em torno de seu eixo *G* e a distância de sua ponta a seu centro de massa é *r*. Calcule a velocidade de precessão do pião, ω_P.



Dados do problema

- velocidade de rotação do pião: ω_R;
- raio de giro do pião: *G*;
- distância da ponta ao centro de massa do pião: *r*.

Solução

O pião gira em torno do seu eixo de simetria, com velocidade ω_R, e este eixo gira (precessiona) em torno de um eixo vertical que passa pela ponta do pião, com velocidade ω_P. Sendo $d\varphi$ um ângulo infinitesimal de deslocamento do raio de simetria do pião em torno do eixo de precessão (figura 1), a velocidade angular de precessão será dada por

$$\boldsymbol{\omega}_P = \frac{d\varphi}{dt} \tag{I}$$

O eixo de simetria do pião forma um ângulo θ com o eixo vertical e devido a sua rotação ele possui um momento angular *L* na direção do eixo de simetria (figura 2-A). A projeção do momento angular (d) será (figura 2-B)

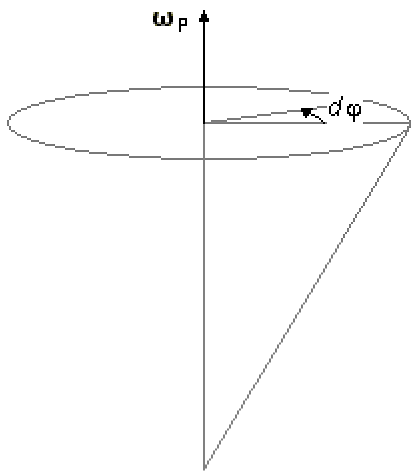


figura 1

$$\text{sen}\,\theta = \frac{d}{L} \Rightarrow d = L\,\text{sen}\,\theta$$

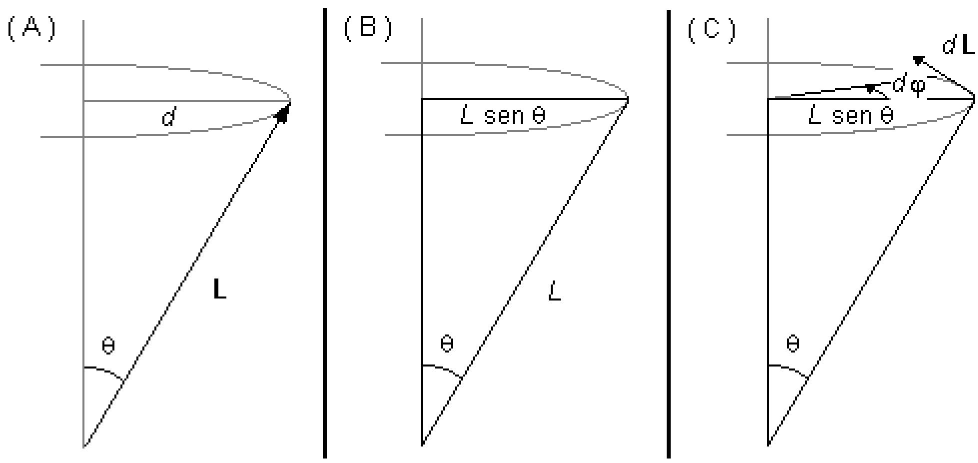


figura 2

Então para a variação do momento angular, temos

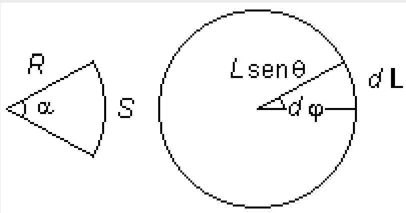
$$d\mathbf{L}=L\ \text{sen}\ \theta\ d\varphi$$
$$d\varphi=\frac{d\mathbf{L}}{L\ \text{sen}\ \theta} \tag{II}$$

observação: *o comprimento de um arco de uma circunferência de raio R e ângulo α é dado por*

$$S=R\,\alpha$$

pela figura 2-C podemos fazer as seguintes analogias:

- *o comprimento do arco S corresponde ao deslocamento infinitesimal do momento angular* $d\mathbf{L}$;
- *o ângulo α do setor da circunferência corresponde ao ângulo infinitesimal* $d\varphi$;
- *o raio R do setor da circunferência corresponde a* $L\ \text{sen}\ \theta$.



O torque será a variação temporal do momento angular, de onde podemos obter a expressão para a variação infinitesimal do momento angular

$$\mathbf{N}=\frac{d\mathbf{L}}{dt}$$
$$d\mathbf{L}=\mathbf{N}\,dt \tag{III}$$

substituindo (III) em (II) e em (I) vem

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{P}}=\frac{1}{L\ \text{sen}\ \theta}\frac{\mathbf{N}\,dt}{dt}$$
$$\boldsymbol{\omega}_{\text{P}}=\frac{\mathbf{N}}{L\ \text{sen}\ \theta} \tag{IV}$$

O torque da força peso é dado por

$$\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{p} \tag{V}$$

o peso é dado por

$$\mathbf{p}=M\,\mathbf{g} \tag{VI}$$

substituindo (VI) em (V)

$$\mathbf{N}=\mathbf{r}\times M\,\mathbf{g} \tag{VII}$$

Na figura 3-A temos o vetor posição **r** que localiza o centro de massa (C.M.) do pião e vetor que indica a força peso $M\,\mathbf{g}$, do produto vetorial indicado em (VII) temos o vetor torque **N**.

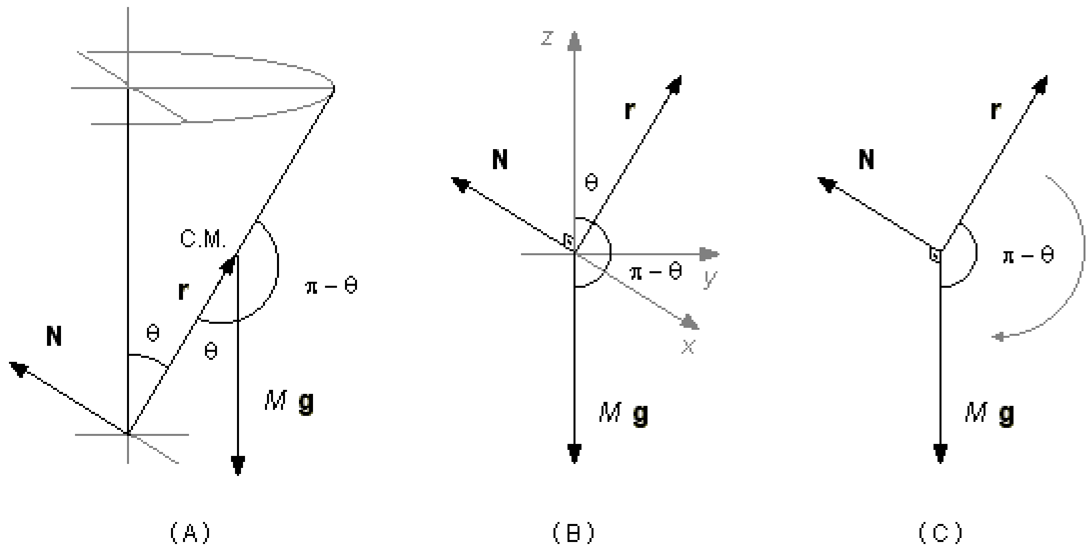


figura 3

Desenhando os vetores num sistema de eixos coordenados (figura 3-B) temos, neste caso, o vetor $M\,\mathbf{g}$ na direção do eixo-z para baixo e o vetor $\mathbf{r}$ no plano yz, inclinado de θ em relação ao eixo-z. O produto vetorial será obtido pela regra da mão direita (levando o vetor $\mathbf{r}$ em direção a $M\,\mathbf{g}$ pelo menor ângulo, $\pi-\theta$, e não θ), assim o vetor que indica o torque $\mathbf{N}$ estará no sentido do eixo-x negativo, figura 3-C.

Substituindo (VII) em (IV), temos para a velocidade angulara de precessão

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{P}}=\frac{\mathbf{r}\times M\,\mathbf{g}}{L\,\operatorname{sen}\theta}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{P}}=\frac{M}{L\,\operatorname{sen}\theta}\,\mathbf{r}\times\mathbf{g} \tag{VIII}$$

O vetor momento angular é dado por

$$\mathbf{L}=I\,\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}} \tag{IX}$$

e o momento de inércia em função é

$$I=M\,G^{2} \tag{X}$$

substituindo (X) em (IX), temos

$$\mathbf{L}=M\,G^{2}\,\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}}$$

e o módulo do momento angular fica

$$L=M\,G^{2}\,\omega_{\mathrm{R}} \tag{XI}$$

substituindo (XI) em (VIII), o vetor velocidade de precessão será

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{P}}=\frac{M}{M\,G^{2}\,\omega_{\mathrm{R}}\,\operatorname{sen}\theta}\,\mathbf{r}\times\mathbf{g}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{P}}=\frac{1}{G^{2}\,\omega_{\mathrm{R}}\,\operatorname{sen}\theta}\,\mathbf{r}\times\mathbf{g} \tag{XII}$$

O módulo do produto vetorial $\mathbf{r}\times\mathbf{g}$ será calculado por

$$\left|\mathbf{r}\times\mathbf{g}\right|=\left|\mathbf{r}\right|\left|\mathbf{g}\right|\operatorname{sen}\left(\pi-\theta\right)$$

observação: *pela regra do seno da diferença, temos*

$$\begin{gathered}\operatorname{sen}\left(\pi-\theta\right)=\operatorname{sen}\pi\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\pi\\ \operatorname{sen}\left(\pi-\theta\right)=0.\cos\theta-\operatorname{sen}\theta.\left(-1\right)\\ \operatorname{sen}\left(\pi-\theta\right)=\operatorname{sen}\theta\end{gathered}$$

O produto vetorial pode se escrito como

$$\begin{gathered}\left|\mathbf{r}\times\mathbf{g}\right|=\left|\mathbf{r}\right|\left|\mathbf{g}\right|\operatorname{sen}\theta\\ \left|\mathbf{r}\times\mathbf{g}\right|=r\,g\operatorname{sen}\theta\end{gathered}$$

O módulo da expressão (XII), será

$$\omega_{\mathrm{P}}=\frac{1}{G^{2}\,\omega_{\mathrm{R}}\operatorname{sen}\theta}\,r\,g\operatorname{sen}\theta$$

$$\boxed{\omega_{\mathrm{P}}=\frac{r\,g}{G^{2}\,\omega_{\mathrm{R}}}}$$