Curvas Algébricas Planas - LISTA 8

1. Considere a curva elíptica $\mathcal{C} : y^2 = x^3 - 25x$ e seja $P_\infty = (0 : 1 : 0)$ o elemento neutro do grupo abeliano associado a $\mathcal{C}$. Mostre que

   (1) $(0,0) \oplus (-5,0) = (5,0)$
   (2) $[2](0,0) := (0,0) \oplus (0,0) = P_\infty$.

2. Considere a curva elliptica $\mathcal{C} : y^2 = x(x+1)(2x+1)/6$ e seja $P_\infty = (0 : 1 : 0)$ o elemento neutro do grupo abeliano associado a $\mathcal{C}$. Mostre que

   (1) $(0,0) \oplus (1,1) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
   (2) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \oplus (1,1) = (24, -70)$.

3. Seja $\mathcal{C}$ uma curva elíptica plana e seja $P_0 \in \mathcal{C}$ o ponto escolhido como elemento neutro do grupo abeliano associado a $\mathcal{C}$, e seja ℓ_{P_0} a reta tangente a curva $\mathcal{C}$ no ponto P_0.

   (1) Mostre que $Q, R, S \in \mathcal{C}$ são colineares se, e somente se, $Q \oplus R \oplus S = P_0'$, onde $\ell_{P_0} \cdot \mathcal{C} = 2P_0 + P_0'$.
   (2) Se $P_0 \in \mathcal{C}$ é ponto de inflexão, mostre que $Q, R, S \in \mathcal{C}$ são colineares se, e somente se, $Q \oplus R \oplus S = P_0$.
   (3) Se $P_0 \in \mathcal{C}$ é ponto de inflexão, mostre que Qé ponto de inflexão, se, e somente se, $[3]Q = P_0$.

4. Considere a cônica $\mathcal{C} : xy + xz + yz = 0$ definida sobre $\mathbb{Q}$. Mostre que a cônica dual $\mathcal{C}^*$ tem equação dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz) = 0.$$

5. Mostre que a dual de uma cônica em característica 2 é uma reta.

6. Mostre que a curva Hermitana $\mathcal{H} : x^{q+1} + y^{q+1} + z^{q+1} = 0$, definida sobre $\mathbb{F}_q$, é auto-dual.

7. Suponha que uma curva plana (racional) $\mathcal{C}$ tem parametrização $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Mostre que uma equação paramétrica da dual $\mathcal{C}^*$ é dada por

$$(p(t), q(t)) = (\frac{-y'(t)}{x'(t)y(t) - x(t)y'(t)}, \frac{x'(t)}{x'(t)y(t) - x(t)y'(t)}),$$

   e verifique que $\mathcal{C}^{**} = \mathcal{C}$. Use o fato acima para apresentar a dual da cúbica $yz^2 = x^3$.

8. Sejam $\mathcal{C}^Q$ e $\mathcal{H}_\mathcal{C}$ a polar em relação ao ponto Q e a Hessiana de $\mathcal{C}$, respectivamente. Mostre que

$$I(P, \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^Q) = \begin{cases} 2, & \text{se P é um ponto duplo simples} \\ 3, & \text{se P é cúspide simples} \end{cases} \tag{1}$$

$$I(P, \mathcal{C} \cap \mathcal{H}_\mathcal{C}) = \begin{cases} 6, & \text{se P é um ponto duplo simples} \\ 8, & \text{se P é cúspide simples} \end{cases} \tag{2}$$

9. Considere a quártica de Klein

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0,$$

definida sobre um corpo K de característica zero. Usando as fórmulas Plücker, explique porque a quártica de Klein tem 28 bitangentes.

10. Seja $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{A}^2$ uma curva plana irredutível e considere o morfismo $\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{A}^2$, dado por $(x, y) \mapsto (x, xy)$. Mostre que $\mathcal{X}$ é birracionalmente equivalente a $Im(\phi)$.

11. Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ curvas irredutíveis e $\phi : \mathcal{X} \dashrightarrow \mathcal{Y}$ um mapa racional de grau 1. Mostre que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são birracionalmente equivalentes.

12. Seja $\mathcal{C} : axy + bxz + cyz = 0$ uma cônica irredutível e $\phi = (xy, xz, yz) : \mathcal{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ um mapa racional. Mostre que ϕ é um morfismo e determine a equação da curva $\mathcal{Y} = Im(\phi)$. Determine se $\phi : \mathcal{X} \dashrightarrow \mathcal{Y}$ é ou não um isomorfismo.

13. Seja $\mathbb{F}_q$ o corpo finito de q elementos, e considere as curvas planas $\mathcal{H}_1 : x^{q+1} + y^{q+1} + z^{q+1} = 0$ e $\mathcal{H}_2 : y^qz + yz^q = x^{q+1}$. Mostre que $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são a "mesma "curva, isto é, são isomorfas sobre $\overline{\mathbb{F}_q}$.

14. Considere a curva plana afim $\mathcal{C} : y^2 = x^3$. Determine $A(C)$ e mostre que ele não é normal, ou seja, não é integeralmente fechado em $K(C)$. Seja R o fecho integral de $K[C]$ em $K(C)$. Mostre que, a menos de isomorfismo, exite uma única curva $\mathcal{D}$, não singular, birracional a $\mathcal{C}$, tal que $R = A(D)$. Tal curva $\mathcal{D}$ tamém é conhecida como normalização da curva $\mathcal{C}$.

15. O gênero de uma curva algébrica irredutível é um número inteiro $g \geq 0$ que é talvez o invariante birracional mais importante da curva. Uma das formas de calcular o gênero a partir de um modelo plano da curva é usando blow-up e a noç ao de pontos singulares infinitamente próximos, conforme descremos a seguir.

   Considere $\mathcal{F}$ uma curva plana irredutível e P um ponto singular de $\mathcal{F}$. Seja $\mathcal{F}_1$ o blow up de $\mathcal{F}$ em P e E o divisor excepcional do blow up. Se $P_1 \in \mathcal{F}_1 \cap E$ é um ponto singular de $\mathcal{F}_1$, então P_1 é chamado de pontos singular infinitamente próximois de $\mathcal{F}$ sobre P. De forma similar, os pontos singulares infinitamente próximos de $\mathcal{F}_1$ sobre P_1 são chamados de pontos singulares infinitamente próximois de $\mathcal{F}$ sobre P, e assim por diante. Também consideramos o próprio P, como ponto singular infinitamente próximos de $\mathcal{F}$ sobre P. Agora considere o inteiro dado por

$$\delta_P = \sum_Q \frac{m_Q(m_Q - 1)}{2}$$

   onde Q passa por todos os pontos singulares infinitamente próximos de $\mathcal{F}$ sobre P, em_Q é a multiplicidade de cada ponto Q. Se d é o grau da curva

$\mathcal{F}$, pode-se provar que o gênero g de $\mathcal{F}$ é dado por

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{P} \delta_P. \tag{3}$$

onde a soma é feita sobre todos os pontos singulares P de $\mathcal{F}$.

16. Seja $\mathcal{F} : f(x,y) = 0$ uma curva irredutı́vel de grau d e P um ponto singular de $\mathcal{F}$ de multiplicidade m_P. Mostre que se P é um singularidade ordinaária então $\delta_P = m_P(m_P - 1)/2$.

17. Calcule o gênero da curvas a seguir ($K = \mathbb{Q}$).
    (1) $\mathcal{F} : y^4 = 17x^4 + 2x^2$.
    (2) $\mathcal{G} : x^4 + x^2y^2 + x^2y - xy^2 - xy + y^4$.
    (3) Existe um modelo plano não singular para a curva $\mathcal{G}$ acima?

18. Para $n \geq 1$, considere a curva plana $\mathcal{C}_n : y^2 = x^{2n+1}$ e observe que $P = (0,0)$ é ponto singular da curva. Mostre que tal singularidade pode ser resolvida por uma sequência $\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1 \to \cdots \to \mathcal{C}_n$ de n blow-ups. Conclua que $K(\mathcal{C}_n) \simeq K(x)$.